

Méthode de décomposition de domaine et éléments finis nodaux pour la résolution de l'équation d'Helmholtz

A. Bendali ^a, Y. Boubendir ^b,

^a UMR 5640, MIP INSA-CNRS-UPS, INSA (G2M), 135 av de Rangeuil 31077 Toulouse & CERFACS, 42, Avenue de Coriolis, 31057 Toulouse. E-mail :bendali@gmm.insa-tlse.fr

^b Laboratoire Jacques-Louis Lions (UMR 7598), Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris & CERFACS, 42, Avenue de Coriolis, 31057 Toulouse.
E-mail :boubendir@ann.jussieu.fr

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

Résumé. L'utilisation d'une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement, dans le cadre d'une résolution par éléments finis, nécessite un traitement particulier des degrés de liberté communs à plus de deux sous-domaines. C'est le cas, par exemple, lorsqu'on utilise une méthode conforme d'éléments finis nodaux pour la résolution de l'équation de Laplace ou d'Helmholtz. Par commodité, de tels degrés de liberté seront appelés "points de jonction". Nous développons ici une approche permettant un tel traitement. A la différence d'une méthode de décomposition de domaine au sens strict, celle-ci requiert un post-traitement, complétant chaque itération qui consiste en la résolution d'un système de la taille du nombre de points de jonction. Nous démontrons que l'algorithme ne peut pas s'arrêter de façon intempestive et qu'il converge. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Domain decomposition method and nodal finite element for solving Helmholtz equation

Abstract. *The utilization of a non-overlapping domain decomposition method, in the framework of a resolution by finite elements, requires a particular treatment of the degrees of freedom shared by more than two subdomains. This is the case, for example, when solving a Laplace or Helmholtz equation by means of a conformal nodal finite element method. For convenience, such degrees of freedom will be called "cross-points". We describe here an approach permitting such a treatment. In contrast to a domain decomposition method in the strict sense, our approach requires a post-processing completing each iteration, which consists of solving a system whose size is the number of cross-points. We prove that the algorithm cannot break down and that it converges. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

Abridged English version

Note présentée par Prénom NOM

S0764-4442(00)0????-?/FLA

© 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

A. Bendali, Y. Boubendir

Consider the following model boundary-value problem set with the Helmholtz equation $\Delta u + k^2 u = 0$ in a polygonal or a polyhedral domain Ω where u is subject to a Dirichlet boundary condition $u = 0$ on Γ and a terminating boundary condition $\partial_n u - iku = f$ on S such that $\partial\Omega = \Gamma \cup S$, $\Gamma \cap S = \emptyset$. The data are the wave number $k > 0$ and the function f , expressed from the incident wave. We are interested in solving this problem by a non-overlapping domain decomposition method similar to those initiated by P.-L. Lions [8] and adapted later for wave propagation problems by B. Després [5], but here in the context of a nodal finite element discretization. The method consists of breaking up the initial domain Ω into several subdomains Ω_m ($m = 1, \dots, N_d$) such that $\bar{\Omega} = \bigcup_{m=1}^{N_d} \bar{\Omega}_m$, $\Omega_m \cap \Omega_n = \emptyset$, if $m \neq n$ ($m, n = 1, \dots, N_d$) and rewriting the continuity conditions, in an equivalent form, at the interfaces Σ_ℓ ($\ell = 1, \dots, N_f$), defined as the interior of $\bar{\Omega}_m \cap \bar{\Omega}_n$ when it is non-empty (cf. [5, 8]). The solution then reduces to an iterative procedure. Each iteration is done by solving local problems posed only in each subdomain and transmitting information through the interfaces.

A difficulty appears at the level of the cross-points which are points common to several interfaces and thus to several subdomains. B. Després [5] and Collino, Ghanemi and Joly [4] have used a mixed finite element method to avoid nodes at cross-points. The disadvantage of this approach is that it imposes a special discretization which can be hard to develop for general systems. Another way to proceed, mainly met in the context of FETI methods (see e.g. [3, 6]), consists of treating a cross-point like any other point on the interface. It results in an overdetermined system for the matching conditions at the cross-points and an underdetermined one for the auxiliary interface unknowns that join the formulation in these techniques.

The essential idea on which our method is based consists of keeping the finite elements unknowns and equations related to the cross-points. In other words, a strong coupling is maintained for the degrees of freedom carried by the cross-points for both the unknowns and the testing functions. In this way no nodal value is introduced for the interface unknowns at these points. In contrast to a strict domain decomposition method, the local problems remain coupled at these nodes. However, since their number is relatively small, even when compared to the size of the local problems, a Schur complement procedure deals with the coupling as a simple post-processing completing each iteration.

According to the dimension of the problem, let \mathcal{T}^h be a nondegenerate triangular or tetrahedral mesh that induces a mesh \mathcal{T}_m^h on each subdomain Ω_m . To maintain coupling between the sub-domains at cross-points only, we define \tilde{X}^h as the space of functions $v^h \in L^2(\Omega)$ such that $v_m^h := v^h|_{\Omega_m} \in X_m^h$ and v^h continuous at cross-points where $X_m^h := \{v_m^h \in C^0(\bar{\Omega}_m); v_m^h|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_m^h\}$. Introducing a suitable space for the interface unknowns y_m^h and adequate bilinear forms $c_m^h(\cdot, \cdot)$ on this space (cf. [1]), the domain decomposition algorithm can be written as follows

$$\begin{cases} (u^h)^{(n)} \in \tilde{X}^h, \quad \forall v^h \in \tilde{X}^h, \\ \sum_{m=1}^{N_d} a_m((u_m^h)^{(n)}, v_m^h) + \beta c_m^h((u_m^h)^{(n)}, v_m^h) = \sum_{m=1}^{N_d} (c_m^h((y_m^h)^{(n)}, v_m^h) + L_m v_m^h), \end{cases} \quad (1)$$

with $(y_m^h)^{(0)} = 0$, $a_m(u, v) := \int_{\Omega_m} (\nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv) d\Omega_m - ik \int_{S \cap \partial\Omega_m} uv dS$, $L_m v := \int_{S \cap \partial\Omega_m} f v dS$, $\beta = -i\beta_0$ where $\beta_0 > 0$ is a given parameter, and $(y_m^h)^{(n+1)} := (1-r)(y_m^h)^{(n)} + r(w_m^h)^{(n)}$ where $(w_m^h)^{(n)}$ is obtained using $(y_m^h)^{(n)}$ and the values of $(u^h)^{(n)}$ at the interfaces (cf. [1]). The parameter $0 < r < 1$ is introduced to improve the convergence.

The following theorem ensures that (1) can be solved in an efficient and stable way.

THEOREM 0.1. – *Let us denote by $X_{m,c}^h$ the subspace of $v_m^h \in X_m^h$ vanishing at all cross-points. Given $\chi_m^h \in \{H^1(\Omega_m)\}'$ ($m = 1, \dots, N_d$), there exists $h_0 > 0$ and a constant C such that for $0 < h < h_0$ both the following two problems*

$$\begin{cases} z_m^h \in X_{m,c}^h, \quad \forall v_m^h \in X_{m,c}^h, \\ a_m(z_m^h, v_m^h) + \beta c_m^h(z_m^h, v_m^h) = \chi_m^h v_m^h \end{cases} \quad \begin{cases} u^h \in \tilde{X}^h, \quad \forall v^h \in \tilde{X}^h, \\ \sum_{m=1}^{N_d} a_m(u_m^h, v_m^h) + i\beta c_m^h(u_m^h, v_m^h) = \sum_{m=1}^{N_d} \chi_m^h v_m^h \end{cases}$$

admit one and only one solution satisfying

$$\|z_m^h\|_{1,\Omega_m} \leq C \sup_{\|v_m^h\|_{1,\Omega_m} \leq 1} |\chi_m^h v_m^h|, \quad \left\{ \sum_{m=1}^{N_d} \|u_m^h\|_{1,\Omega_m}^2 \right\}^{1/2} \leq C \sum_{m=1}^{N_d} \sup_{\|v_m^h\|_{1,\Omega_m} \leq 1} |\chi_m^h v_m^h|.$$

The next theorem establishes that the domain decomposition algorithm converges.

THEOREM 0.2. – *The sequence $(u^h)^{(n)}$ converges towards the usual approximation u^h by the \mathbb{P}_1 -continuous finite element method of the above boundary-value problem with the following error bound*

$$\left\{ \sum_{m=1}^{N_d} \left\| (u_m^h)^{(n)} - u_m^h \right\|_{1,\Omega_m}^2 \right\}^{1/2} \leq C \kappa_h^n \left\{ \sum_{m=1}^{N_d} \left\| (u_m^h)^{(0)} - u_m^h \right\|_{1,\Omega_m}^2 \right\}^{1/2},$$

where C is a constant independent of $0 < h < h_0$ and κ_h is a constant < 1 .

Several tests confirming these theoretical conclusions are given in [2].

Remark 1. – *The same conclusions hold for the Laplace equation, that is, with $k = 0$ by taking $\beta = \beta_0$.*

1. Introduction

Une des difficultés de la méthode de décomposition de domaine sans recouvrement, introduite par P.-L. Lions [8] dans le cadre de l'équation de Laplace et adaptée ensuite par B. Després [5] aux problèmes de propagation d'ondes, concerne le traitement des degrés de liberté communs à plus de deux sous-domaines. Par commodité, en référence au cas d'une méthode d'éléments finis nodaux, nous appellerons ce type de degrés de liberté des "points de jonction".

B. Després [5] et Collino, Ghanemi et Joly [4] utilisent une discrétisation par une méthode d'éléments finis mixtes ou hybrides qui, par nature, ne donne lieu à aucun point de jonction. Dans le cas des méthodes FETI, on choisit d'appliquer le même traitement aux points de jonction et aux degrés de liberté communs à deux sous-domaines seulement ([9, 3, 6]). Les méthodes mixtes ou hybrides peuvent être difficiles à utiliser dans certains cas comme, par exemple, le système de l'élasticité. Le traitement des points de jonction dans les méthodes FETI conduit à un système d'équations sur-déterminé pour les raccords des inconnues primales et sous-déterminé pour les inconnues d'interface.

Nous présentons dans ce papier un traitement des points de jonction qui consiste à conserver les inconnues et les équations éléments finis pour les degrés de liberté communs à plus de deux sous-domaines. Nous nous inspirons ensuite des algorithmes de P.-L. Lions [8] et de B. Després [5], ou encore des méthodes FETI [3, 6] puisque nous travaillons directement sur le système discret, pour relaxer les conditions de raccord sur les interfaces. Les problèmes locaux dans chaque sous-domaine sont ainsi fortement couplés aux points de jonction. Cependant, grâce à l'utilisation d'un complément de Schur, la différence avec une méthode de décomposition de domaine au sens strict [1, 2] est réduite à un post-traitement effectué à chaque itération. Ce post-traitement consiste en fait à résoudre un petit système de la taille du nombre de points de jonction. Nous montrons que l'algorithme de décomposition de domaine ne peut pas s'arrêter de façon intempestive et que chaque itération peut être effectuée de façon stable aussi bien globalement que relativement à la résolution des problèmes locaux. Tout comme pour les méthodes mixtes ou hybrides, et contrairement aux méthodes FETI, nous montrons que la résolution par approximations successives du système de type point fixe sur les inconnues d'interface est alors convergente.

2. Méthode de décomposition de domaine

Nous nous limitons ici au problème modèle simple suivant en propagation d'onde

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad \partial_n u - iku = f \text{ sur } S, \end{cases} \quad (2)$$

A. Bendali, Y. Boubendir

mais la méthode reste valable dans des cas beaucoup plus généraux [1]. Nous avons noté par Ω un domaine polygonal en dimension 2 et polyédral en dimension 3 tel que $\partial\Omega = \Gamma \cup S$ avec $\Gamma \cap S = \emptyset$, k le nombre d'onde et f est une donnée aux limites qui s'exprime à l'aide de l'onde incidente. Nous indiquerons par la suite les adaptations à apporter à l'algorithme pour l'équation de Laplace, c'est à dire pour $k = 0$. La théorie variationnelle, le principe du prolongement analytique et l'alternative de Fredholm permettent de façon classique de s'assurer que le problème (2) est bien posé (cf., e.g., [7]).

Les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement reposent sur l'utilisation d'une partition sans recouvrement de Ω en sous-domaines Ω_m ($m = 1, \dots, N_d$), c'est à dire tels que $\bar{\Omega} = \bigcup_{m=1}^{N_d} \bar{\Omega}_m$, $\Omega_m \cap \Omega_n = \emptyset$ si $m \neq n$ ($m, n = 1, \dots, N_d$). L'interface Σ_ℓ ($\ell = 1, \dots, N_f$) séparant $\Omega_{m_1}^\ell$ de $\Omega_{m_2}^\ell$ est l'intérieur (pour la topologie induite sur le bord) de $\bar{\Omega}_{m_1}^\ell \cap \bar{\Omega}_{m_2}^\ell$ s'il est non vide. Les indices m_1^ℓ et m_2^ℓ , dans cet ordre et pour chaque ℓ , constituent une table donnant les interfaces qui sera utile dans la suite. On effectue ensuite un maillage \mathcal{T}^h , en triangles ou tétraèdres dans le cas présent, compatible avec la partition précédente dans le sens que \mathcal{T}^h induit un maillage \mathcal{T}_m^h sur chaque Ω_m . Il s'agit alors de résoudre le problème discret suivant

$$\begin{cases} u^h \in X^h, & \forall v^h \in X^h, \\ a(u^h, v^h) = Lv^h, \end{cases} \quad (3)$$

avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\Omega} k^2 uv \, d\Omega - ik \int_{\Gamma} uv \, d\Gamma, & Lv &:= \int_{\Gamma} fv \, d\Gamma, \\ X^h &:= \{v^h \in C^0(\bar{\Omega}); v^h|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}^h \text{ et } v^h|_{\Gamma} = 0\}. \end{aligned}$$

La difficulté essentielle de l'analyse du problème discret (3) est due à la non coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ qui ne satisfait qu'une condition inf-sup de Babuška. La solvabilité et la stabilité de la solution ne sont assurées alors que pour h (paramètre de discrétisation) assez petit. Cette difficulté se retrouve dans la méthode de décomposition de domaine que nous allons décrire.

La description de la méthode de décomposition de domaine requiert toute une série de notations et de définitions. Tout d'abord, Λ_m est l'ensemble des numéros ℓ d'interfaces Σ_ℓ séparant Ω_m d'un autre sous-domaine Ω_n et \mathcal{N}_c est l'ensemble des sommets du maillage \mathcal{T}^h appartenant à $\bigcup_{\ell=1}^{N_f} \partial\Sigma_\ell$. Au sens strict, \mathcal{N}_c n'est pas seulement constitué de points de jonction. Cette distinction aurait cependant alourdi inutilement l'exposé. On note par X_m^h la restriction des éléments de X^h à Ω_m . Contrairement à une méthode de décomposition de domaine stricte où chaque itération est effectuée en résolvant N_d problèmes découplés posés chacun avec un espace X_m^h , on garde ici un couplage entre les problèmes locaux en utilisant l'espace suivant

$$\tilde{X}^h := \{v^h \in L^2(\Omega); v_m^h := v^h|_{\Omega_m} \in X_m^h \text{ et } v^h \text{ continu en chaque noeud dans } \mathcal{N}_c\}.$$

Le maillage \mathcal{T}^h induit sur chaque interface un maillage $\mathcal{T}_{\Sigma_\ell}^h$ en segments ou en triangles T' selon la dimension. On note par Σ_ℓ^h le sous-domaine de Σ_ℓ formé des T' qui n'ont aucun sommet dans \mathcal{N}_c , par $Y_\ell^h := \{y^h \in L^2(\Sigma_\ell^h); \exists v^h \in X^h \text{ tel que } y^h = v^h|_{\Sigma_\ell^h}\}$, par $Y^h := \prod_{\ell=1}^{N_f} Y_\ell^h \times Y_\ell^h$ avec une convention sur les composantes $(y_{1\ell}^h, y_{2\ell}^h)$ d'un élément $y^h \in Y^h$ compatible avec la table ci-dessus des interfaces : $y_{i\ell}^h$ est l'inconnue d'interface relative au domaine m_i^ℓ ($i = 1, 2$). On note enfin par $y_m^h := \{y_{i_m\ell}^h\}_{\ell \in \Lambda_m}$, avec $i_m = 1$ si $m_1^\ell = m$ et $i_m = 2$ sinon, et par $c_m^h(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire définie sur les éléments précédents par

$$c_m^h(y_m^h, v_m^h) := \sum_{\ell \in \Lambda_m} \int_{\Sigma_\ell^h} y_{i_m\ell}^h v_m^h \, d\Sigma_\ell^h.$$

On se donne alors $\beta = -i\beta_0$ avec $\beta_0 > 0$. Le théorème, énoncé plus loin, assure que pour ($L :=$

$\{L_m\}_{m=1}^{m=N_d}, y^h$ donné dans $\prod_{m=1}^{m=N_d} \{H^1(\Omega_m)\}^{-1} \times Y^h$, le problème

$$\begin{cases} u^h \in \tilde{X}^h, \quad \forall v^h \in \tilde{X}^h, \\ \sum_{m=1}^{N_d} (a_m(u_m^h, v_m^h) + \beta c_m^h(u_m^h, v_m^h)) = \sum_{m=1}^{N_d} (c_m^h(y_m^h, v_m^h) + L_m v_m^h), \end{cases} \quad (4)$$

est bien posé si h est suffisamment petit. Ceci définit un opérateur linéaire S de $\prod_{m=1}^{m=N_d} \{H^1(\Omega_m)\}^{-1} \times Y^h$ dans Y^h par

$$\{S(L, y^h)\}_{i_m \ell} = -y_{i_m \ell}^h + 2\beta u_m^h|_{\Sigma_\ell^h} \quad (\ell \in \Lambda_m; m = 1, \dots, N_d).$$

On définit enfin l'opérateur linéaire Π de Y^h dans lui-même, d'échange entre sous-domaines, par

$$\{\Pi y^h\}_{1\ell} = y_{2\ell}^h, \quad \{\Pi y^h\}_{2\ell} = y_{1\ell}^h \quad (\ell = 1, \dots, N_f).$$

On peut alors établir (cf. [1]) que la résolution du problème (3) se ramène à celle du problème de type point fixe

$$y^h = (1 - r)y^h + r\Pi S(L, y^h) \quad (5)$$

où $0 < r < 1$ est un paramètre de relaxation pour accélérer la convergence.

La méthode de décomposition de domaine sans recouvrement peut s'interpréter comme une procédure de résolution du problème de point fixe ci-dessus par approximations successives. En fait, on peut avoir intérêt à accélérer la convergence en utilisant une méthode de Krylov qui va converger d'autant plus vite que l'application dont on cherche le point fixe est contractante.

On a tout d'abord le théorème, annoncé ci-dessus, qui établit que l'algorithme d'approximations successives ne peut pas s'arrêter de façon intempestive et que chaque itération peut être effectuée en résolvant un problème local dans chaque sous-domaine, suivi d'un post-traitement, et ceci d'une façon stable par rapport au pas du maillage h dans les deux cas.

THÉORÈME 2.1. – Notons par $X_{m,c}^h$ le sous-espace formé des $v_m^h \in X_m^h$ dont les valeurs nodales correspondant à un noeud de \mathcal{N}_c sont nulles. Soient $\chi_m^h \in \{H^1(\Omega_m)\}'$ pour $m = 1, \dots, N_d$. Il existe $h_0 > 0$ et une constante C telle que pour $0 < h < h_0$ les problèmes

$$\begin{cases} z_m^h \in X_{m,c}^h, \quad \forall v_m^h \in X_{m,c}^h, \\ a_m(z_m^h, v_m^h) + \beta c_m^h(z_m^h, v_m^h) = \chi_m^h v_m^h \end{cases} \quad \begin{cases} u^h \in \tilde{X}^h, \quad \forall v^h \in \tilde{X}^h, \\ \sum_{m=1}^{N_d} a_m(u_m^h, v_m^h) + \beta c_m^h(u_m^h, v_m^h) = \sum_{m=1}^{N_d} \chi_m^h v_m^h \end{cases}$$

admettent une solution et une seule vérifiant

$$\|z_m^h\|_{1,\Omega_m} \leq C \sup_{\|v_m^h\|_{1,\Omega_m} \leq 1} |\chi_m^h v_m^h|, \quad \left\{ \sum_{m=1}^{N_d} \|u_m^h\|_{1,\Omega_m}^2 \right\}^{1/2} \leq C \sum_{m=1}^{N_d} \sup_{\|v_m^h\|_{1,\Omega_m} \leq 1} |\chi_m^h v_m^h|.$$

Démonstration. – Outre les techniques usuelles d'analyse des formulations non coercives, la démonstration s'appuie de façon fondamentale sur le fait que les conditions de raccord aux noeuds de \mathcal{N}_c disparaissent après passage à la limite lorsque h tend vers 0, autrement dit : pour tout $v \in L^2(\Omega)$ tel que $v_m := v|_{\Omega_m} \in H^1(\Omega_m)$ et $v|_{\Gamma} = 0$, il existe $v^h \in \tilde{X}^h$ tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \sum_{m=1}^{N_d} \|v_m^h - v_m\|_{1,\Omega_m}^2 \right\}^{1/2} = 0$ (cf. [1]). \square

A. Bendali, Y. Boubendir

On peut alors démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2.2. – Soit $(u^h)^{(n)}$ définie de façon récursive comme étant la solution de (4) avec $y^h := (y^h)^{(n)}$, $(y^h)^{(0)} = 0$ et $(y^h)^{(n+1)} := (1 - r)(y^h)^{(n)} + r\Pi S(L, (y^h)^{(n)})$. Alors, $(u^h)^{(n)}$ converge vers la solution u^h de (2) avec l'estimation d'erreur suivante

$$\left\{ \sum_{m=1}^{N_d} \left\| (u_m^h)^{(n)} - u_m^h \right\|_{1, \Omega_m}^2 \right\}^{1/2} \leq C \kappa_h^n \left\{ \sum_{m=1}^{N_d} \left\| (u_m^h)^{(0)} - u_m^h \right\|_{1, \Omega_m}^2 \right\}^{1/2}, \quad (6)$$

où C est une constante indépendante de $0 < h < h_0$ et κ_h une constante < 1 .

Démonstration. – Les techniques de [4] ramènent la démonstration à s'assurer que $y^h = \Pi S(0, y^h)$ si et seulement si $y^h = 0$ et $\|S(0, y^h)\|_{Y^h} \leq \|g^h\|_{Y^h}$ (cf. [1]). \square

Plusieurs tests validant ces conclusions théoriques sont donnés dans [2].

Remarque 1. – Pour le cas de l'équation de Laplace, tous les énoncés précédents restent vrais en prenant pour paramètre $\beta = \beta_0 > 0$.

Références bibliographiques

- [1] A. Bendali, Y. Boubendir, *Non-overlapping domain decomposition method for nodal finite elements*, En préparation.
- [2] Y. Boubendir, *Techniques de Décomposition de Domaine et Méthode d'Equations Intégrales*. Doctorat de Mathématiques Appliquées, INSA de Toulouse (2002).
- [3] A. de la Bourdonnaye, C. Farhat, A. Macedo, F. Magoulès & F.-X. Roux: *A Non-overlapping Domain Decomposition Method for the Exterior Helmholtz Problem*. Contemporary Mathematics, Volume 218, pp. 42–66 (1998).
- [4] F. Collino, S. Ghanemi & P. Joly *Domain Decomposition Method for Harmonic Wave Propagation: a General Presentation*. Computer methods in applied mechanics and engineering, Volume 184, pp. 171–211 (2000).
- [5] B. Després: *Méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de propagation d'ondes en régime harmonique. Le théorème de Borg pour l'équation de Hill vectorielle*. Doctorat de l'Université Paris VI (1991).
- [6] M.J. Gander, F. Magoules & F. Nataf, *Optimized Schwarz Methods without Overlap for the Helmholtz Equation*, SIAM Journal on Scientific Computing, **24** (1) (2002) pp. 38-60.
- [7] R. Leis, *Initial boundary-value problems in Mathematical Physics*, B. G. Tubner; Stuttgart and John Wiley & Sons; Chichester et al., 1986.
- [8] P.-L. Lions: *On the Schwarz alternating method. III: A variant for non overlapping subdomains*, Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, held in Houston, Texas, March 20–22, 1989, SIAM, Philadelphia, 1990.
- [9] C. Farhat & F.-X. Roux: *Implicit parallel processing in structural mechanics*. Computational Mechanics Advances, North Holland, Volume 2, Number 1, June (1994).