Equations Elliptiques Non-linéaires avec second membre L^1 ou mesure

Yassine Boubendir

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, on présente un ensemble de méthodes qui permettent de donner des résultats d'existence et parfois d'unicité (c'est en fait le point essentiel de l'étude, en vue de mettre en lumière des critères discriminants qui permettent de prouver qu'un problème est bien posé mathématiquement) pour des problèmes non linéaires (et plus précisément pour un opérateur monotone ou pseudo-monotone de type Leray-Lions) avec un second membre L^1 ou mesure.

Le problème modèle que nous allons consisdérer est le suivant

$$\begin{cases} -div(a(x, \nabla u)) = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ (on ne suppose aucune régularité sur le bord) et $a : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de Carathéodory, c'est à dire que pour tout couple (x, ξ) appartenant à $\Omega \times \mathbb{R}^n$, $a(x, \xi)$ qui est dans $\mathbb{R}^n$ est mesurable en $x \in \Omega$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et continue en $\xi \in \mathbb{R}^n$ pour presque tou $x \in \Omega$.

On considère que a vérifie aussi les conditions de coercivité, monotonie et croissance telles qu'il existe $p > 1$ tel que

– $\exists \alpha > 0$ tel que pour tout ξ et presque tout x on ait

$$a(x, \xi)\xi \geq \alpha |\xi|^p.$$

– Pour tout ξ_1, ξ_2 et presque tout x on a

$$\{a(x, \xi_1) - a(x, \xi_2)\} (\xi_1 - \xi_2) > 0 \quad \text{pour tout } \xi_1 \neq \xi_2.$$

– $\exists \beta > 0$ et $h(x) \in L^p(\Omega)$ tels que pour tout ξ et presque tout x on ait

$$|a(x, \xi)| \leq \beta \{h(x) + |\xi|\}^{p-1}.$$

Nous nous limiterons au cas $p \leq n$ car si $p > n$, on a l'inclusion de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ qui nous donne $\left(C^0(\overline{\Omega})\right)' \subset \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$, comme $\left(C^0(\overline{\Omega})\right)' = M(\Omega)$ (l'ensemble des mesures de Radon sommables sur Ω), les mesures sont alors des éléments de $W^{-1,p'}(\Omega)$ et on est alors dans le cadre variationnel habituel, i.e. on considère la solution faible du problème variationnel

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, \nabla u)\nabla v =< f, v >_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \tag{2}$$

qui est équivalent au problème aux limites

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ -div(a(x, \nabla u)) = f \quad \text{dans } D'(\Omega). \end{cases} \tag{3}$$

Or, pour $p \leq n$ et quand $f \in L^1(\Omega)$ où à $M(\Omega)$, il est hors de question que la solution appartienne à $W_0^{1,p}(\Omega)$, puisque quand Ω est une boule et f la masse de Dirac, la solution du problème de Dirichlet pour le *p-laplacien*

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|) = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

qui est en fait que le problème modèle est donné (au moins formellement, car u n'appartient pas à $L^1(\Omega)$ quand p est proche de 1) par

$$u(x) = C\left[|x|^{-\frac{n-p}{p-1}} - R^{-\frac{n-p}{p-1}}\right], \tag{5}$$

qui est telle que

$$\int_\Omega |\nabla u|^q dx < +\infty \quad \text{ssi} \quad q < \overline{q} = \frac{n}{n-1}(p-1) = n'(p-1). \tag{6}$$

Ainsi la première ligne de (2) (l'espace dans lequel vit la solution) doit être modifiée quand $f \in L^1(\Omega)$ ou à $M(\Omega)$. On va voir que la deuxième ligne doit être aussi modifiée dans certains cas (et pas seulement pour l'écriture du second membre de l'équation) car le concept-même de la solution faible doit être remis en question, la première difficulté donc, est de savoir quel sens donner à la solution du problème (1)

Chapitre 1

Solutions faibles

1.1 Existence d'une solution faible quand le second membre est une mesure

Considérons une suite f^ϵ telle que

$$\begin{cases} f^\epsilon \text{ régulière, } \|f^\epsilon\|_{L^1(\Omega)} \leq M \\ f^\epsilon \rightharpoonup f \text{ dans } D'(\Omega), \end{cases} \tag{1.1}$$

et les solutions faibles correspondantes

$$\begin{cases} u^\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ -div(a(x, \nabla u^\epsilon)) = f^\epsilon \quad \text{dans } D'(\Omega). \end{cases} \tag{1.2}$$

Pour obtenir des estimations a priori, on va utiliser dans (1.2) des fonctions test qui restent bornées dans $L^\infty(\Omega)$. Pour $0 \leq h \leq k$, on définit la fonction lipschitzienne $S_{k,h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$S_{k,h} = \begin{cases} 0 \quad \text{si } |t| \leq h \\ t - hsgnt \quad \text{si } h \leq |t| \leq k \\ (k-h)sgnt \quad \text{si } |t| \geq k. \end{cases}$$

Quand $h = 0$, la fonction $S_{k,h}$ coincide avec la troncature T_k à la hauteur k définie par,

$$T_k = \begin{cases} t \quad \text{si } |t| \leq k \\ ksgnt \quad \text{si } |t| \geq k. \end{cases}$$

En utilisant $S_{k,h}(u^\epsilon)$, qui appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$, comme fonction test dans (1.2, on obtient

$$\int_\Omega a(x, \nabla u^\epsilon) \nabla S_{k,h}(u^\epsilon) dx = \int_\Omega f^\epsilon S_{k,h}(u^\epsilon) dx$$

et $\nabla S_{k,h}(u^\epsilon) = \nabla u^\epsilon S'_{k,h}(u^\epsilon)$, alors

$$\int_\Omega a(x, \nabla u^\epsilon)\nabla u^\epsilon S'_{k,h}(u^\epsilon)dx = \int_\Omega f^\epsilon S_{k,h}(u^\epsilon)dx, \tag{1.3}$$

d'où en utilisant la coercivité, $\|f^\epsilon\|_{L^1(\Omega)} \leq M$ et le fait que $S_{k,h}$ est bornée par $(k-h)$

$$\alpha \int_\Omega |\nabla S_{k,h}(u^\epsilon)|^p dx \leq M(k-h).$$

En particulier, pour $h = 0$

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u^\epsilon)|^p dx \leq \frac{M}{\alpha} k, \tag{1.4}$$

et donc

$$\|T_k(u^\epsilon)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} k.$$

On peut alors extraire une suite diagonale en ϵ telle que pour tout k entier fixé

$$T_k(u^\epsilon) \rightharpoonup T_k(u) \quad dans\ W_0^{1,p}(\Omega) \text{ faible}, \tag{1.5}$$

avec $u \in L^0(\Omega)$ (l'espace des fonctions mesurables, finies presque partout sur Ω).

A priori, la fonction u n'a pas de gradient au sens des distributions, mais $\nabla T_k(u)$ appartient à $(L^p(\Omega))^n$. Par abus d' écriture, on définit ∇u comme la fonction de $(L^0(\Omega))^n$ qui est égale à $\nabla T_k(u)$ sur $\{x \in \Omega : |u(x)| \leq k\}$.

Lemma 1.1.1 *Soient $1 \leq p \leq n$ et $0 \leq q \leq \overline{q}$ avec $\overline{q} = \frac{n}{n-1}(p-1)$. Si $u^\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et vérifie (1.4), on a*

$$\int_\Omega |\nabla(u^\epsilon)|^q dx \leq C. \tag{1.6}$$

Preuve 1.1.1 *Pour $m > 0$ donné, soit $\Psi_m(x) = m \int_0^x \frac{dt}{(t+1)^{m+1}}$ pour $x \geq 0$ et $\Psi_m(x) = -\Psi_m(-x)$ pour $x \leq 0$, on a $|\Psi_m(x)| \leq 1$, $|\Psi'_m(x)| \leq m$ et $\Psi_m(x)$ continue, $\Psi_m(u^\epsilon) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, alors de (1.4) on a*

$$\int_\Omega |\nabla(u^\epsilon)|^p \Psi'_m(u^\epsilon) dx \leq C.$$

D'autre part $\Psi'_m(u^\epsilon) = m/(|u^\epsilon|+1)^{m+1}$, *donc*

$$\int_\Omega \frac{|\nabla(u^\epsilon)|^p}{(|u^\epsilon|+1)^{m+1}} \leq C.$$

Grâce à l'inégalité de Holder, on obtient pour $q < p$

$$\int_\Omega |\nabla(u^\epsilon)|^q dx \leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u^\epsilon)|^p}{(|u^\epsilon|+1)^{m+1}} dx\right)^{q/p} \left(\int_\Omega (|u^\epsilon|+1)^{(m+1)q/(p-q)}\right)^{(p-q)/p}.$$

Choisissons alors $m > 0$ *tel que* $(m+1)q/(p-q) < q^* = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, *ce qui est possible pour* $q < (p-1)\frac{n}{n-1}$, *alors*

$$(|u^\epsilon|+1)^{(m+1)q/(p-q)} \leq \lambda |u^\epsilon|^{q^*} + C(\lambda),$$

pour λ *petit, on obtient donc*

$$\left(\int_\Omega |\nabla u^\epsilon|^q dx\right)^{1/q} \leq \lambda^{(p-q)/pq} \left(\int_\Omega |u^\epsilon|^{q^*} dx\right)^{(p-q)/pq} + C.$$

De plus, $u^\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *donc l'inégalité de Poincaré-Sobolev nous donne*

$$\left(\int_\Omega |u^\epsilon|^* dx\right)^{1/q^*} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u^\epsilon|^q dx\right)^{1/q},$$

or $(p-q)/pq < 1/q^*$, *alors*

$$\left(\int_\Omega |u^\epsilon|^q dx\right)^{1/q} \leq \tfrac{1}{2} \left(\int_\Omega |\nabla u^\epsilon|^q dx\right)^{1/q} + C.$$

Pour λ *assez petit, on a alors*

$$\int_\Omega |u^\epsilon|^q dx \leq C,$$

où C *dépend de* $\frac{M}{\alpha}, q, p, n$ *et* $|\Omega|$. *Cette démonstration nous a permis de voir que* u^ϵ *est bornée dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *pour* $q < n'(p-1)$.

L'estimation (1.6) est optimale, comme on le constate en considérant la solution du *p-laplacien* dans une boule donnée par (5).

D'autre part, si $p > 2 - \frac{1}{n}$, on a $\overline{q} > 1$, ce qui montre que la limite u définie par (1.5) appartient au moins à $W_0^{1,1}(\Omega)$. Dans ce cas l'abus d'écriture signalé ci-dessus n'est plus nécessaire.

Lemme 1.1.2 *Quitte à extarire une nouvelle sous-suite, on a*

$$\nabla u^\epsilon \to \nabla u \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{1.7}$$

Preuve 1.1.3 *On montre que ∇u^ϵ tend vers ∇u en mesure, ce qui entrainera que $\nabla u^\epsilon \to \nabla u$ presque partout, pour une sous-suite. Cela consiste à montrer que*

$$\forall \delta, \forall \mu, \exists \epsilon_0 \text{ tel que } \forall \epsilon \leq \epsilon_0 \ mes\{x, |(\nabla u^\epsilon - \nabla u)(x)| \geq \delta\} \leq \mu.$$

Remarquons pour $k > 0$ et $\eta > 0$, on a

$$\begin{array}{l} \{|(\nabla u^\epsilon - \nabla u)(x)| \geq \delta\} \subset \\ \{|u^\epsilon| \geq k\} \cup \{|u| \geq k\} \cup \{|\nabla u^\epsilon| \geq k\} \cup \{|\nabla u| \geq k\} \cup \{|u^\epsilon - u| \geq \eta\} \cup \\ \{|(\nabla u^\epsilon - \nabla u)(x)| \geq \delta, |u^\epsilon| \leq k, |u| \leq k, |\nabla u^\epsilon| \leq k, |\nabla u| \leq k, |u^\epsilon - u| \leq \eta\}. \end{array}$$

Nous appellerons A_1 à A_6 les six ensembles du membre de droite. Il est facile de montrer que $mes(A_i) \leq \mu$ pour i allant de 1 à 5 (utiliser le fait que u^ϵ et ∇u^ϵ sont bornées dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ et que u^ϵ converge vers u dans $L^1(\Omega)$ grâce au théorème de Rellich).

Il reste donc à majorer $mes(A_6)$, et à choisir η. D'après la monotonie de a, nous avons $[a(x,\xi_1) - a(x,\xi_2)](\xi_1 - \xi_2) > 0$ pour $\xi_1 \neq \xi_2$, or l'ensemble des (s, ξ_1, ξ_2) tel que $|s| \leq k$, $|\xi_1| \leq k$, $|\xi_2| \leq k$, $|\xi_1 - \xi_2| \geq \delta$ est compact et a est continue en ξ pour presque tout x, donc $[a(x,\xi_1) - a(x,\xi_2)](\xi_1 - \xi_2)$ atteint sur ce compact son minimum que nous noterons $\rho(x)$, qui vérifie $\rho(x) > 0$ p.p. De plus grâce à un résultat d'intégration, il existe μ' tel que

$$\int_{A_6} \rho(x)dx \leq \mu' \Rightarrow mes(A_6) \leq \mu.$$

Il suffit donc de montrer que $\int_{A_6} \rho dx \leq \mu'$. Par définition de ρ, nous avons

$$\int_{A_6} \rho(x)dx \leq \int_{\{x \in A_6; |(u^\epsilon - T_k(u))| \leq \eta\}} [a(x, \nabla u^\epsilon) - a(x, \nabla T_k(u))](\nabla u^\epsilon - T_k(u))dx,$$

car sur A_6, $|(u^\epsilon - T_k(u))| = |(u^\epsilon - u)(x)| \leq \eta$, de plus le terme intégré est positif et $\nabla T_\eta(u^\epsilon - T_k(u))(x) = \nabla(u^\epsilon - T_k(u))(x)$ sur l'ensemble des x tel que $|(u^\epsilon - T_k(u))(x)| \leq \eta$, on a donc

$$\int_{A_6} \rho(x)dx \leq \int_\Omega a(x, \nabla u^\epsilon)\nabla T_\eta(u^\epsilon - T_k(u))dx - \int_\Omega a(x, \nabla T_k(u))\nabla T_\eta(u^\epsilon - T_k(u))dx$$

et si l'on choisit $T_\eta(u^\epsilon - T_k(u))$ *comme fonction test dans (1.2), on obtient*

$$\left|\int_\Omega a(x, \nabla u^\epsilon)\nabla T_\eta(u^\epsilon - T_k(u))dx\right| \leq \eta M.$$

Il reste à majorer l'autre intégrale ; or pour $|u^\epsilon| \geq k+\eta$ *on a* $|(u^\epsilon - T_k(u))(x)| \geq \eta$*, d'où* $\nabla T_\eta(u^\epsilon - T_k(u)) = 0$*. Alors*

$$\int_\Omega a(x, \nabla T_k(u))\nabla T_\eta(u^\epsilon - T_k(u))dx = \int_\Omega a(x, \nabla T_k(u))\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u^\epsilon) - T_k(u))dx$$

On fixe maintenant $h > 0$, $T_h(u^\epsilon)$ *est alors borné dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *(pour* $k = h$*, (1.4) entraine que* $\int_\Omega |\nabla T_h(u^\epsilon)|^p dx \leq Ch$*, et d'autre part on a* $|T_h(u^\epsilon)|^p dx \leq h$*), alors* $\nabla(T_{k+\eta}(u^\epsilon) - T_k(u))$ *converge faiblement dans* $L^p(\Omega)$ *vers* $\nabla(T_{k+\eta}(u) - T_k(u))$*, de plus grâce à la condition de croissance ,* $a(x, \nabla T_k(u))$ *appartient à* $L^{p'}(\Omega)$*, et donc, par la convergence faible, on a*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega a(x, \nabla T_k(u))\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u^\epsilon) - T_k(u))dx = \int_\Omega a(x, \nabla T_k(u))\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u) - T_k(u))dx,$$

or $\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u^\epsilon) - T_k(u)) \to 0$ *p.p quand* $\eta \to 0$, $\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u) - T_k(u))$ *est borné dans* $L^p(\Omega$ *et* $a(x, \nabla T_k(u))$ *est borné dans* $L^{p'}(\Omega)$ *et donc par convergence dominée, le second membre tend vers 0.*

Fixons $\eta < \mu'/2M$ *tel que*

$$\left|\int_\Omega a(x, \nabla T_k(u))\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u) - T_k(u))dx\right| \leq \frac{\mu'}{4},$$

alors soit ϵ_0 *tel que pour tout* $\epsilon \leq \epsilon_0$

$$\left|\int_\Omega a(x, \nabla T_k(u))\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u^\epsilon) - T_k(u))dx - \int_\Omega a(x, \nabla T_k(u))\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u) - T_k(u))dx\right| \leq \frac{\mu'}{4},$$

donc

$$\left|\int_\Omega a(x, \nabla T_k(u))\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u^\epsilon) - T_k(u))dx\right| \leq \frac{\mu'}{2},$$

alors

$$\int_{A_6} \rho(x)dx \leq M\frac{\mu'}{2M} + \frac{\mu'}{2} = \mu'$$

et le choix de μ' entraine que $mes(A_6) \leq \mu$, d'où

$$mes\{x, |(\nabla u^\epsilon - \nabla u)(x)| \geq \delta\} \leq 6\mu.$$

La convergence en mesure est donc démontrée.

De la condition de croissance et de (1.6), on déduit que $a(x, \nabla u^\epsilon)$ est borné dans $L(^r(\Omega))^n$ pour tout $r < n'$. D'autre part, comme $a(x, \xi)$ est de Carathéodory, (1.7) implique que $a(x, \nabla u^\epsilon(x))$ converge presque partout vers $a(x, \nabla u(x))$. Soit $r' < r$, l'inégalité de Holder nous donne alors pour ω mesurable

$$\int_\omega |a(x, \nabla u^\epsilon) - a(x, \nabla u)|^{r'} dx \leq$$
$$\left(\int_\omega |a(x, \nabla u^\epsilon) - a(x, \nabla u)|^r dx\right)^{r'/r} \left(\int_\omega \chi_\omega dx\right)^{1-r'/r} \leq C mes(\omega).$$

Ainsi $|a(x, \nabla u^\epsilon) - a(x, \nabla u)|^{r'}$ est équi-intégrable (voir annexe) et converge presque partout vers 0, donc converge dans $L^1(\Omega)$ grâce au théorème de Vitali (voir annexe), et donc

$$a(x, \nabla u^\epsilon) \rightarrow a(x, \nabla u) \text{ dans } (L^r(\Omega))^n \text{ fort pour tout } r < n'. \tag{1.8}$$

Il est alors facile de passer à la limite dans (1.2). On vient de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.1.4 *Si $f \in M(\Omega)$, il existe une fonction $u \in L^0(\Omega)$ qui vérifie*

$$\begin{cases} T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \forall k \text{ fixé} \\ \int_\Omega |\nabla u|^q dx < +\infty \quad \forall q < \overline{q} = n'(p-1) \\ a(x, \nabla u) \in (L^r(\Omega))^n \quad \forall r < n', \end{cases} \tag{1.9}$$

$$-div(a(x, \nabla u)) = f \quad \text{dans } D'(\Omega), \tag{1.10}$$

où, dans le cas $1 < p \leq 2 - \frac{1}{n}$, ∇u est la fonction de $(L^0(\Omega))^n$ qui coincide avec $\nabla T_k(u)$ sur $\{x \in \Omega, |u(x)| \leq k\}$.

Remarque 1 On notera que l'equation (1.10) est équivalente à

$$\int_\Omega a(x, \nabla u) \nabla v dx = \int_\Omega v df \quad \forall v \in W_0^{1,r'}(\Omega), \tag{1.11}$$

(pour tout $r' > n$), où chaque terme a un sens puisque $W_0^{1,r'}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ quand $r' > n$.

1.2 Existence et unicité d'une solution renormalisée quand le second membre est dans L^1

le résultat qu'on a obtenu ci-dessus est seulement un résultat d'existence d'une solution faible (solution au sens des distributions). Nous allons voir que dans le cas où f appartient à $L^1(\Omega)$, on peut introduire un concept de solution différent qui permet d'obtenir de plus un résultat d'unicité.

On va supposer maintenant que, outre (1.1), f^ϵ satisfait

$$f^\epsilon \to f \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ fort},$$

(on peut en fait supposer la convergence faible dans $L^1(\Omega)$; mais celle-ci est équivalente à l'équi-intégrabilité de f^ϵ, et est bien plus forte que (1.1)).

Revenons à (1.3). Par le théorème de Vitali on a

$$\int_\Omega f^\epsilon S_{k,h}(u^\epsilon)dx \to \int_\Omega f S_{k,h}(u)dx \text{ si } \epsilon \to 0. \tag{1.12}$$

En utilisant la coercivité dans (1.3), on a donc

$$\alpha \limsup_\epsilon \int_{h\le|u^\epsilon|\le k} |\nabla u^\epsilon|^p dx \le \int_\Omega f S_{k,h}(u)dx.$$

On prend maintenant $h = m$, $k = 2m$ et donc $S_{k,h} = S_m$. Comme $|\frac{1}{m}S_m(t)| \le 1$ et $S_m(t) = 0$ si $|t| \le m$, on a par le théorème de Lebesgue

$$\frac{1}{m}\int_\Omega f S_m(u)dx \to 0 \quad \text{si } m \to +\infty.$$

D'où

$$\limsup_\epsilon \int_{m\le|u^\epsilon|\le 2m} |\nabla u^\epsilon|^p dx \to 0 \quad \text{si } m \to \infty,$$

ou encore, de façon équivalente

$$\limsup_\epsilon \frac{1}{m}\int_\Omega |\nabla S_m(u^\epsilon)|^p dx \to 0 \quad \text{si } m \to \infty.$$

Par semi-continuité inférieure faible, on en déduit que

$$\frac{1}{m}\int_\Omega |\nabla S_m(u)|^p dx \to 0 \quad \text{si } m \to \infty.$$

C'est là un résultat supplémentaire sur u quand $f \in L^1(\Omega)$. Notons que (1.13) n'est pas vérifié quand f est seulement une mesure : en effet si on considère la solution élémentaire du $p-$*laplacien* dans une boule (donnée par (5)), on constate que

$$\frac{1}{m}\int_\Omega |\nabla S_m(u)|^p dx \to C'' > 0 \quad \text{si } m \to +\infty. \tag{1.13}$$

Lemme 1.2.1 *Si $f \in L^1(\Omega)$ et si f^ϵ tend vers f dans $L^1(\Omega)$ fort (ou faible), les solutions u^ϵ de (1.2)) vérifient*

$$T_k(u^\epsilon) \to T_k(u) \textit{ dans } W_0^{1,p} \textit{ pour tout } k \textit{ fixé.} \tag{1.14}$$

Preuve 1.2.2 *Soit k fixé. De (1.2)) on a*

$$\int_{|u^\epsilon|\le k} a(x, \nabla T_k(u^\epsilon))\nabla u^\epsilon T_k^{'}(u^\epsilon)dx = \int_\Omega f^\epsilon T_k(u^\epsilon)dx,$$

et T_k étant lipschitzienne. On convient de noter $T_k^{'}$ le représentant borélien borné de la dérivée classique (qui existe presque partout), défini par

$$T_k^{'} = \begin{cases} 1 & si\ |t| \le k \\ 0 & si\ |t| > k, \end{cases}$$

d'où, pour un certain k

$$\int_\Omega a(x, \nabla T_k(u^\epsilon))\nabla T_k(u^\epsilon)dx = \int_\Omega f^\epsilon T_k(u^\epsilon)dx. \tag{1.15}$$

D'autre part, $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut alors écrire

$$\int_\Omega a(x, \nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx = \int_\Omega f^\epsilon T_k(u)dx. \tag{1.16}$$

On a $\nabla T_k(u)$ qui appartient à $(L^p(\Omega))^n$ et $a(x, \nabla T_k(u))$ qui est borné dans $(L^{p'}(\Omega))^n$ (condition de croissance) ; de plus f appartient à $L^1(\Omega)$ et $T_k(u)$ est borné, donc les deux membres de (1.16)) ont un sens.

On fait la différence de (1.15) et (1.16), on obtient

$$\int_\Omega a(x, \nabla T_k(u^\epsilon))\nabla T_k(u^\epsilon)dx - \int_\Omega a(x, \nabla T_k(u))\nabla T_k(u)dx =$$
$$\int_\Omega f^\epsilon T_k(u)dx - \int_\Omega f T_k(u)dx,$$

d'où, en utilsant la coercivité

$$\alpha\left|\int_\Omega |\nabla T_k(u^\epsilon)|^p dx - \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p dx\right| \leq \left|\int_\Omega f^\epsilon T_k(u^\epsilon)dx - \int_\Omega f T_k(u)dx\right|.$$

En faisant tendre ϵ vers 0. (1.12) nous donne

$$\|\nabla T_k(u^\epsilon)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to \|\nabla T_k(u)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Donc, en plus de la convergence faible, on a la convergence en norme, on utilise maintenant le fait que $W_0^{1,p}$ $(1 < p < \infty)$ est uniformément convexe pour obtenir la convergence forte.

La convergence faible (1.5) est donc en fait forte si f^ϵ tend vers f dans $L^1(\Omega)$ fort (ou faible). Notons que (1.14) n'est pas vérifié si f^ϵ converge au sens vague des mesures, i.e. satisfait seulement (1.1).

Introduisons maintenant une définition.

Définition 1.2.3 *Nous dirons que u est solution renormalisée du problème (1) si*

$$\begin{cases} u \in L^0(\Omega) \\ T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ pour tout } k \\ \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_\Omega |\nabla S_m(u)|^p dx \to 0 \text{ si } m \to +\infty, \end{cases} \tag{1.17}$$

et

$$\begin{cases} -div(h(u)a(x,\nabla u)) + h'(x)a(x,\nabla u)\nabla u = fh(u) \quad \text{dans } D'(\Omega) \\ \forall h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h \in C_0^1(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{1.18}$$

où $C_0^1(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions qui appartiennent à $C^1(\mathbb{R})$ et qui sont à support compact.

Cette définition comprend deux parties, comme la définition (3) d'une solution faible : appartenance à la classe définie par (1.17) et équation (1.18). Notons que l'équation (1.18) est une équation au sens des distributions et équivalente à

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega h(u)a(x,\nabla u)\nabla v dx + \int_\Omega h'(u)a(x,\nabla u)\nabla u v dx = \int_\Omega fh(u)v dx \\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ h \in C_0^1(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{1.19}$$

Dans (1.19), chaque terme a un sens. En effet h est à support compact, et donc pour un certain k on a $supph \subset [-k, +k]$. Le premier terme de (1.19) doit être lu comme

$$\int_{|u|\leq k} h(u)a(x, \nabla u)\nabla v dx = \int_{\Omega} h(u)a(x, \nabla T_k(u))\nabla v dx$$

qui a sens car ∇v appartient à $(L^p(\Omega))^n$ et $a(x, \nabla T_k(u))$ à $(L^{p'}(\Omega))^n$, à cause de la condition de croissance et du fait que $T_k(u)$ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$. De même, le deuxième terme est un abus d'écriture pour

$$\int_{|u|\leq k} h'(u)a(x, \nabla u)\nabla u v dx = \int_{\Omega} h'(u)a(x, \nabla T_k(u))\nabla T_k(u) v dx$$

qui est fini puisque v est dans $L^\infty(\Omega)$. Enfin, le second membre de (1.19) a un sens puisque f appartient à $L^1(\Omega)$ et $h(u)$ et v à $L^\infty(\Omega)$.

On notera que la formulation (1.19) est une formulation variationnelle dans laquelle les fonctions test sont de la forme $vh(u)$, avec $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $h \in C_0^1(\mathbb{R})$ (on peut en fait utiliser aussi des fonctions h à support compact qui sont affines par morçeaux). Cette classe de fonctions test est beaucoup plus riche que kes fonctions test de $W_0^{1,r'}(\Omega)$ avec $r' > n$ qui sont seules utilisables dans la formulation (1.11).

La formulation (1.19) est l'adaptation à notre problème de la notion de solution entropique utilisée pour les équations hyperboliques du premier ordre non linéaires : lorsqu'on considère par exemple l'équation de Burgers, on ne demande pas seulement que u satisfasse

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad \text{dans } D'(\Omega),$$

mais on veut de plus que

$$\partial_t q(u) + \partial_x \eta(u) \leq 0 \quad \text{dans } D'(\Omega), \tag{1.20}$$

pour toute fonction $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe (on a définit η par $\eta'(s) = q'(s)f'(s)$). L'inégalité (1.20) est obtenue en ajoutant le terme $-\epsilon\Delta u^\epsilon$ (les équations hyperboliques non linéaires sont généralement obtenues comme limtes de problèmes dans lesquels un terme du second ordre existe) à l'équation intiale

$$\partial_t u^\epsilon + \partial_x f(u^\epsilon) = 0 \quad \text{dans } D'(\Omega),$$

avec $\epsilon > 0$ un terme de diffusion, qui correspond à la réalité physique. On multiplie l'équation obtenue par $q'(u^\epsilon)$, on fait apparaitre le terme $q'(u^\epsilon)\Delta u^\epsilon$ qui vérifie

$$\epsilon q'(u^\epsilon)\Delta u^\epsilon = \epsilon \Delta q(u^\epsilon) - \epsilon q''(u^\epsilon)(\nabla u^\epsilon)^2.$$

Le terme $\epsilon q''(u^\epsilon)(\nabla u^\epsilon)^2$ est toujours positif ; en passant à la limite, on obtient (1.20). Dans notre cas en multipliant la deuxième ligne de (1.2) par $h'(u^\epsilon)$ avec $h \in C_0^1(\mathbb{R})$ et en passant à la limite, on obtient (1.18) ; la fonction h joue donc ici le même rôle que la fonction q et comme pour l'équation de Burgers, elle permet d'obtenir l'unicité.

Théorème 1.2.4 *Si $f \in L^1(\Omega)$, il existe une solution renormalisée de (1). Cette solution est unique. Enfin, elle dépend continuement des données : si f^ϵ tend vers f dans $L^1(\Omega)$ fort (ou faible) les solutions renormalisées u^ϵ relatives à f^ϵ convergent (dans la classe définie par (1.17)) vers la solution renormlisée u relative à f.*

Preuve 1.2.5 *Pour démontrer l'existence, on utilise dans (1.2) la fonction test $vh(u^\epsilon)$ (qui appartient à $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ quand $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $h \in C_0^1(\mathbb{R})$), on obtient*

$$\int_\Omega h(u^\epsilon)a(x, \nabla u^\epsilon)\nabla v dx + \int_\Omega h'(u^\epsilon)a(x, \nabla u^\epsilon)\nabla u^\epsilon v dx = \int_\Omega f^\epsilon h(u^\epsilon)v dx.$$

En écrivant que pour un certain k tel que $supp h \subset [-k, +k]$, on a

$$\int_{|u^\epsilon|\le k} h(u^\epsilon)a(x, \nabla u^\epsilon)\nabla v dx = \int_\Omega h(u^\epsilon)a(x, \nabla T_k(u^\epsilon))\nabla v dx$$

et

$$\int_{|u^\epsilon|\le k} h'(u^\epsilon)a(x, \nabla u^\epsilon)\nabla u^\epsilon v dx = \int_\Omega h'(u^\epsilon)a(x, \nabla T_k(u^\epsilon))\nabla T_k(u^\epsilon)v dx.$$

On passe maintenant à la limite en utilisant le lemme 1.2.1 et le théorème de Lebesgue, ce qui démontre (1.19).

Démontrons maintenant l'unicité. Si on considère deux seconds membres f_1 et f_2 et deux solutions u_1 et u_2 correspondantes, on a formellement, en utilisant la fonction test $T_k(u_1 - u_2)$ dans les formulations variationnelles relatives à u_1 et u_2

$$\int_\Omega (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2))(\nabla u_1 - \nabla u_2)T_k'(u_1 - u_2)dx = \int_\Omega (f_1 - f_2)T_k(u_1 - u_2)dx.$$

Si $f_1 = f_2$, le second membre est nul et la stricte monotonie de a implique que $\nabla u_1 = \nabla u_2$ sur $\{x \in \Omega; |u_1(x) - u_2(x)| \leq k\}$, i.e. $\nabla T_k(u_1 - u_2) = 0$ dans Ω, et donc $T_k(u_1 - u_2) = 0$ pour tout k : c'est à dire que $u_1 = u_2$.

Bien sûr, l'usage de la fonction test $T_k(u_1 - u_2)$ dans la formulation faible (1.11) est interdit, car $T_k(u_1 - u_2)$ n'a pas la régularité ($W_0^{1,r'}(\Omega)$ avec $r' > n$). La façon correcte de faire les choses est de considérer, pour le second membre f_1, une solution renormalisée u_1 ; on utilise dans l'équation (1.19) correspondant à u_1 la fonction $h = h_m$ et la fonction test $v = h_m(u_2)(T_{2m}(u_1) - T_{2m}(u_2))$ où h_m est définie par

$$h_m(t) = \begin{cases} 1 \quad si\ |t| \leq m \\ -\dfrac{t}{m} sgnt + 2 \quad si\ m \leq |t| \leq 2m \\ 0 \quad si\ |t| \geq 2m. \end{cases} \tag{1.21}$$

On obtient

$$\int_\Omega h_m(u_1) a(x, \nabla u_1) \nabla (h_m(u_2) T_k(T_{2m}(u_1) - T_{2m}(u_2))) dx +$$
$$\int_\Omega h'_m(u_1) a(x, \nabla u_1) \nabla u_1 h_m(u_2) T_k(T_{2m}(u_1) - T_{2m}(u_2)) dx =$$
$$\int_\Omega f_1 h_m(u_1) h_m(u_2) T_k(T_{2m}(u_1) - T_{2m}(u_2)) dx.$$

De même on utilise $h = h_m$ et $v = h_m(u_1) T_k(T_{2m}(u_1) - T_{2m}(u_2))$ dans l'équation (1.19) correspondant à f_2, ce qui donne

$$\int_\Omega h_m(u_2) a(x, \nabla u_2) \nabla (h_m(u_1) T_k(T_{2m}(u_1) - T_{2m}(u_2))) dx +$$
$$\int_\Omega h'_m(u_2) a(x, \nabla u_2) \nabla u_2 h_m(u_1) T_k(T_{2m}(u_1) - T_{2m}(u_2)) dx =$$
$$\int_\Omega f_2 h_m(u_1) h_m(u_2) T_k(T_{2m}(u_1) - T_{2m}(u_2)) dx.$$

On fait la différence des deux expressions, il apparait alors un certain nombre de termes qui tendent vers 0 quand m tend vers l'infini : on a en effet $|h'_m(t)| = \frac{1}{m}$ si $m \leq |t| \leq 2m$, et $h'_m(t) = 0$ ailleurs, on sait aussi que pour $i = 1$ et 2

$$\frac{1}{m} \int_{m \leq |u_i| \leq 2m} |\nabla u_i|^p dx \to 0 \quad si\ m \to +\infty.$$

On utilise en outre le fait que si u est solution renormalisée du problème (1), on a

$$\frac{1}{m}\int_{|u_i|\leq m} |\nabla u_i|^p dx \leq \frac{1}{\alpha}\|f_i\|_{L^1(\Omega)}, \tag{1.22}$$

qu'on obtient facilement en utilisant dans (1.19) $v = T_m(u_i)$ et $h = h_j$, avec h_j défini par (1.21). En passanr à la limite pour m fixé quand j tend vers l'infini, on obtient

$$\int_\Omega a(x, \nabla u)\nabla T_m(u_i)dx = \int_\Omega fT_m(u_i)dx,$$

pour $i = 1$ et 2, d'où (1.22) en utilisant la coercivité et le fait que $T_m(u_i)$ est borné par m. Enfin, on obtient pour k quelconque

$$\left|\int_\Omega (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2))\nabla T_k(u_1 - u_2)dx\right| \leq \left|\int_\Omega (f_1 - f_2)T_k(u_1 - u_2)dx\right|,$$

d'où

$$\left|\int_{\{x\in\Omega;|u_1-u_2|\leq k\}} (a(x, \nabla u_1) - a(x, \nabla u_2))\nabla(u_1 - u_2)dx\right| \leq \left|\int_\Omega (f_1 - f_2)T_k(u_1 - u_2)dx\right|.$$

Si $f_1 = f_2$; la stricte monotonie de a nous donne l'unicité.

La démonstration de la continuité de la solution renormalisée par rapport au second membre est très proche de cette démonstration d'unicité.

1.3 Existence et unicité d'une solution obtenue par transposition quand le second membre est une mesure et quand $p = 2$

Nous avond donc démontré l'éxistence et l'unicité d'une solution renormalisée quand f appartient $L^1(\Omega)$ (théorème 1.2.4) et auparavant l'existence d'une solution faible quand f est une mesure (théorème 1.1.4). On peut se demander si cette solution faible est unique ; la réponse n'est pas claire, même dans le cas linéaire. Cependant une autre définition de la solution pour un second membre mesure, la notion de solution par transposition, permet dans ce cas d'avoir l'existence et l'unicité.

Considérons donc pour un moment la version linéaire du problème (1), i.e.

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.23}$$

où A désigne une matrice coercive à coefficients L^∞.

On peut montrer que la solution faible de (1.23), définie par

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) = f \quad \text{dans } D'(\Omega) \\ u \in W_0^{1,q}(\Omega) \quad \forall q < n' \end{cases} \tag{1.24}$$

est unique en dimension $n = 2$ ou si les coefficients de A sont réguliers (dans les deux cas on suppose la frontière $\partial\Omega$ régulière) ; d'un autre côté, un contre exemple montre qu'en diemndion $n \geq 3$, il existe pour $f = 0$ une solution non nulle de (1.24) pour une certaine matrice A coercive à coefficients L^∞. Cependant cette solution ne vérifie pas $T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$ pour tout k, alors que cette condition est imposée dans (1.9).

Définissons maintenant la solution par transposition de (1.23). Nous supposerons désormais pour simplifier (mais cette hypothèse peut être supprimée) que la frontière $\partial\Omega$ est régulière. Soit A^t la transposée de la matrice A. Pour $g \in W^{1,q'}(\Omega)$ avec $q' > n$, la solution de

$$\begin{cases} -div(A^t\nabla v) = g \quad \text{dans } D'(\Omega) \\ v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.25}$$

appartient, d'après le théorème de De Giorgi (voir annexe), à un certain $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ où

$$C^{0,\gamma}\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}); \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma} < \infty \quad \text{avec } 0 < \gamma < 1 \right\}.$$

En effet $q' > n$ par hypothèse, A^t est une matrice coercive et à coefficients L^∞ puisque la matrice A vérifie ces conditions ; d'autre part Ω étant borné, les éléments de $W^{-1,q'}(\Omega)$ peuvent être représentés par des fonctions de $L^{q'}(\Omega)$.

On définit l'opérateur $G : W^{-1,q'}(\Omega) \to C^{0,\gamma}\overline{\Omega})$ par

$$v = Gg.$$

L'opérateur G est linéaire continu, et son adjoint G^* est en particulier définit de $M(\Omega)$ à valeurs dans $W_0^{1,q}(\Omega)$, avec $q < n'$. Si $f \in M(\Omega)$, la solution de

$$u = G^* f$$

est définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^{1,q}(\Omega) \\ {}_{W_0^{1,q}(\Omega)} < u, g >_{W^{-1,q'}(\Omega)} = < G^* f, g > = < f, Gg > = \displaystyle\int_\Omega v df \quad \forall g \in W^{-1,q'}(\Omega), \end{array} \right.$$

où v est la solution de (1.25). C'est formellement une solution du problème (1.23). D'où la définition

Définition 1.3.1 *Soit $f \in M(\Omega)$. Nous dirons que u est une solution par transposition du problème linéaire (1.23) si*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^{1,q}(\Omega) \quad \forall q < n' \\ {}_{W_0^{1,q}(\Omega)} < u, g >_{W^{-1,q'}(\Omega)} = \int_\Omega v df \quad \forall g \in W^{-1,q'}(\Omega) \end{array} \right. \tag{1.26}$$

où v est la solution de (1.25).

Théorème 1.3.2 *Le problème linéaire (1.23) a une solution par transposition pour tout second membre $f \in M(\Omega)$. Cette solution est unique et dépend continûment de f (quand $f^\epsilon \rightharpoonup f$ dans $D'(\Omega)$, les solutions par transposition u^ϵ relatives à f^ϵ convergent vers la solution par transposition u relative à f dans $W_0^{1,q}(\Omega)$).*

Preuve 1.3.3 *On considère une suite d'approximation f^ϵ de f vérifiant (1.1) et les solutions faibles correspondantes définies par*

$$\left\{ \begin{array}{l} -div(A\nabla u^\epsilon) = f^\epsilon \quad dans\ D'(\Omega) \\ u^\epsilon \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \tag{1.27}$$

d'autre part, pour $g \in W^{-1,q'}(\Omega)$ avec $q' > n$, la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -div(A^t\nabla v^\epsilon) = g \quad dans\ D'(\Omega) \\ v^\epsilon \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right.$$

converge fortement dans $C^0(\overline{\Omega})$ par le théorème de De Giorgi (injection compacte de $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ dans $C^0(\overline{\Omega})$. De la définition de la solution par transposition on a

$$\left\{\begin{array}{l} u^\epsilon \in W_0^{1,q}(\Omega)\ \forall q < n' \\ {}_{W_0^{1,q}(\Omega)} < u^\epsilon, g >_{W^{-1,q'}(\Omega)} = \displaystyle\int_\Omega v^\epsilon f^\epsilon dx \quad \forall g \in W^{-1,q'}(\Omega), \end{array}\right.$$

enfin, en utilisant la continuité de la solution par rapport au second membre, on voit bien que la solution par transposition coincide avec la limite (dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour $q < n'$) des solutions u^ϵ de (1.27). La solution par transposition peut donc être obtenue comme limite d'approximations, ce qui n'est pas le cas de toute solution de (1.24).

Nous alllons voir que la définition de solution par transposition (qui semble propre au cas linéaire) peut s'étendre au cas monotone quand $p = 2$, et qu'ici aussi, elle coincide avec la limite des approximations. Nous allons pour cela supposer que $\partial\Omega$ est régulière (cette hypothèse peut être supprimée) et renforcer les hypothèses sur a en supposant en outre que :

$$\left\{\begin{array}{l} [a(x,\xi_1) - a(x,\xi_2)](\xi_1 - \xi_2) \geq \alpha|\xi_1 - \xi_2|^2 \\ |a(x,\xi_1) - a(x,\xi_2)| \leq \beta|\xi_1 - \xi_2|. \end{array}\right. \tag{1.28}$$

Introduisons une notation : pour deux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient

$$|Y| \leq \beta|X|, \quad XY \geq \alpha|X|^2$$

et pour λ tel que $0 < \lambda < \alpha$, on introduit la matrice $M(X,Y) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ définie par

$$\left\{\begin{array}{l} M(X,Y) = \lambda I + W \otimes W \\ W = aX + bY,\ a = -\frac{\lambda}{\sqrt{XY - \lambda|X|^2}},\ b = \frac{1}{\sqrt{XY - \lambda|X|^2}}. \end{array}\right.$$

Comme $XY \geq \alpha|X|^2 > XY \geq \lambda|X|^2$, les coefficients a et b sont bien définies si $X \neq 0$. Pour $X = 0$, on a nécessairement $Y = 0$ et on prend par exemple $M(0,0) = \lambda I$.

Il est facile de voir que la matrice $M = M(X,Y)$ vérifie

$$M = M^t,\ M \geq \lambda I,\ MX = Y,\ \|M\| \leq \gamma \tag{1.29}$$

où la consatante γ ne dépend que de α, β et λ, M est donc une matrice coercive à coeficients bornés.

Soient f_1 et f_2 dans $H^{-1}(\Omega)$ et soient u_1 et u_2 les solutions de

$$\begin{cases} -div(a(x, \nabla u_i)) = f_i \quad \text{dans } D'(\Omega) \\ u_i \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{1.30}$$

Définissons

$$M_{1,2}(x) = M(\nabla u_1(x) - \nabla u_2(x), a(x, \nabla u_1(x)) - a(x, \nabla u_2(x))). \tag{1.31}$$

De (1.28), on peut voir que la matrice $M_{1,2}$ vérifie (1.29), donc elle est coercive et à coefficients L^∞ puisqu'elle est mesurable.

Pour $g \in W^{-1,q'}(\Omega)$, avec $q' > n$, la solution v de

$$\begin{cases} -div(M_{1,2}(x)\nabla v) = g \quad \text{dans } D'(\Omega) \\ v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{1.32}$$

appartient à un certain $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ par le théorème de De Giorgi.

On effectue alors le calcul suivant, qui est parfaitement licite puisque f_1 et f_2 sont dans $H^{-1}(\Omega)$ et que $M_{1,2}$ vérifie (1.29) :

$$_{H^{-1}(\Omega)} < f_1 - f_2, v >_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (a(x, \nabla u_1)(x) - a(x, \nabla u_2))\nabla v dx$$

$$= \int_\Omega M_{1,2}(x)(\nabla u_1 - \nabla u_2)\nabla v dx = {}_{H_0^1(\Omega)} < u_1 - u_2, g >_{H^{-1}(\Omega)} .$$

Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 1.3.4 *Soient $p = 2$ et $f_1 \in M(\Omega)$. On suppose que a vérifie de plus (1.28). Nous dirons que u_1 est une solution par transposition du problème (1) relstive à f_1 si*

$$u_1 \in W_0^{1,q}(\Omega), \quad \forall q < n'$$

et pour tout $f_2 \in H^{-1}(\Omega)$ et pour tout $g \in W^{-1,q'}(\Omega)$ avec $q' > n$, on a

$$_{W_0^{1,q}(\Omega)} < u_1 - u_2, g >_{W^{-1,q'}(\Omega)} = \int_\Omega v df - {}_{H^{-1}(\Omega)} < f_2, v >_{H_0^1(\Omega)}, \tag{1.33}$$

où u_2 est la solution de (1.30) relative à f_2, et où v est la solution de (1.32), la matrice $M_{1,2}$ etant définie par (1.31) à partir de $\nabla u_1(x)$ et $\nabla u_2(x)$.

Théorème 1.3.5 *Si $p = 2$ et si a vérifie de plus (1.28), le problème (1) a une solution par transposition pour tout second membre $f \in M(\Omega)$. Cette solution est unique et dépend continûment de f.*

Preuve 1.3.6 *Pour démontrer l'existence d'une solution par transposition, on se donne $f_1 \in M(\Omega)$ et $f_2 \in H^{-1}(\Omega)$. On considère une la suite f_1^ϵ qui vérifie (1.1) et qui converge vers f_1, et les solutions u_1^ϵ et u_2 de (1.30) relatives à f_1^ϵ et f_2. Par (1.33) on a, pour tout $g \in W^{-1,q'}(\Omega)$ avec $q' > n$*

$$ {}_{W_0^{1,q}(\Omega)} < u_1^\epsilon - u_2, g >_{W^{-1,q'}(\Omega)} = \int_\Omega v^\epsilon f_1^\epsilon dx - {}_{H^{-1}(\Omega)} < f_2, v^\epsilon >_{H_0^1(\Omega)}, \quad (1.34) $$

où v^ϵ est la solution de

$$ \begin{cases} -div(M_{1,2}^\epsilon(x)\nabla v^\epsilon) = g \quad dans\ D'(\Omega) \\ v^\epsilon \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (1.35) $$

la matrice $M_{1,2}^\epsilon(x)$ étant définie par (1.31) à partir de $\nabla u_1^\epsilon(x)$ et $\nabla u_2(x)$. En utilisant les lemmes 1.1.1 et 1.1.2, on extrait une sous suite telle que

$$ \begin{cases} u^\epsilon \to u \quad dans\ W_0^{1,q}(\Omega)\ fort\ pour\ tout\ q < n' \\ \nabla u^\epsilon \to \nabla u \quad p.p.\ dans\ \Omega \end{cases} $$

On en déduit que les matrices $M_{1,2}^\epsilon$ convergent presque partout vers la matrice $M_{1,2}$ définie par (1.31) à partir de ∇u_1 et ∇u_2. Comme les $M_{1,2}^\epsilon$ sont équicoercives et bornées dans L^∞, les v^ϵ convergent fortement dans $C^0(\overline{\Omega})$ par le théorème de De Giorgi. Il est alors facile de passer à la limite dans (1.34) et (1.35). Ceci démontre l'existence d'une solution par transposition.

Pour démontrer l'unicité de cette solution, on choisit une suite f_2^ϵ que vérifie (1.1) et converge vers f_1, on utilise $f_2 = f_2^\epsilon$ dans (1.33). On désigne par u^ϵ la limite de la sous suite u_2^ϵ. on obtient

$$ {}_{W_0^{1,q}(\Omega)} < u_1 - u_2^\epsilon, g >_{W^{-1,q'}(\Omega)} = \int_\Omega v df_1 - {}_{H^{-1}(\Omega)} < f_2^\epsilon, v >_{H_0^1(\Omega)} . $$

Comme f_2^ϵ tend vers f_1, on obtient ${}_{W_0^{1,q}(\Omega)} < u_1 - u_1^*, g >_{W^{-1,q'}(\Omega)} = 0$ pour tout $g \in W^{-1,q'}(\Omega)$, i.e. $u_1 = u_1^*$, ce qui démontre l'unicité.

Annexe

Définition d'une famille équi-intégrable. Une famille $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions intégrables sur Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ est dite équi-intégrable si, et seulement si,

$$\lim_{a\to+\infty}\left[\sup_n \int_{\Omega_{a,n}} |f_n|dx\right] = 0 \text{ où } \Omega_{a,n} = \{x; |f_n(x)| > a\}.$$

Propositions.

- Si une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans $L^p(\Omega)$ pour $p > 1$, alors cette famille est équi-intégrable.
- Toute suite de Cauchy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^1(\Omega)$ est une famille équi-intégrable.
- Soit une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si pour tout ϵ, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que

  $$\sup_n \int_\Theta |f_n|dx < \epsilon$$

  pour tout $\Theta \subset \Omega$ tel que $mes(\Theta) < \delta(\epsilon)$, alors $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille équi-intégrable (la réciproque est vraie).

Theéorème de Vitali. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable

ii) pour presque tout $x \in \Omega$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) < +\infty$

iii) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille équi-intégrable, alors on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$$

Theéorème De Giorgi. Soit Ω un ouvert borné régulier. On suppose que la matrice A est coercive et à coefficients L^∞. Soit $f \in L^2(\Omega)\cap L^p(\Omega)$ avec $p > n/2$, alors la solution du problème

$$\begin{cases} -div(A\nabla v) = f \quad \text{dans } D'(\Omega) \\ v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.36}$$

appartient à $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour un certain $0 < \alpha < 1$ (qui dépend de Ω, A et p).

REFERENCES

.

(1) F. Murat, Equations Elliptiques Non Linéaires Avec Second Membre L^1 ou Mesure, 26ème Congrès National d'Analyse numérique. Les Karellis Juin 1994.

(2) A. Prignet, Conditions Aux Limites Non Homogènes Pour Des Problèmes Elliptiques avec Second Membre Mesure, E.N.S de Lyon, Mars 1995.