

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES
APPLIQUÉES DE TOULOUSE

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES
APPLIQUÉES DE TOULOUSE

Discipline : Mathématiques appliquées

présentée et soutenue publiquement

par

Yassine BOUBENDIR

Titre :

TECHNIQUES DE DECOMPOSITION DE DOMAINE ET
METHODE D'EQUATIONS INTEGRALES

JURY :

L. Halpern	<i>Président du Jury</i>
P. Joly	<i>Rapporteur</i>
M. Costabel	<i>Rapporteur</i>
A. Bendali	<i>Directeur de Thèse</i>
J.-P. Vila	<i>Examineur</i>
J.-P. Raymond	<i>Examineur</i>
G. Alleon	<i>Examineur</i>

Table des matières

Introduction	11
1 Le problème physique et les algorithmes de base	19
1.1 Etude du problème modèle	20
1.1.1 Formulation variationnelle	21
1.1.2 Unicité	22
1.1.3 Existence de la solution	26
1.2 Méthode de décomposition de domaine	30
1.2.1 Conditions de raccord	30
1.2.2 Décomposition de domaine	31
1.2.3 Réduction de l'étude de la convergence	36
1.2.4 Variante relaxée de l'algorithme de décomposition de domaine	38
1.3 Analyse de la convergence	40
1.3.1 La théorie de Collino-Ghanemi-Joly	40
1.3.2 Convergence géométrique de l'algorithme de décomposition de domaine	42
1.3.3 Le critère de Collino-Ghanemi-Joly	47
1.3.4 Application du critère Collino-Ghanemi-Joly	48

1.3.5	Convergence de l'algorithme non relaxé	52
2	Algorithme amortissant les modes évanescents	55
2.1	Motivation	56
2.2	Notion de modes propagatifs et mode évanescents	59
2.2.1	Rappels pour le cas d'un guide d'onde	59
2.2.2	Géométrie circulaire	61
2.3	Diagonalisation de l'opérateur d'itération	64
2.3.1	Couronne circulaire avec domaine extérieur	65
2.3.2	Couronne circulaire avec domaine borné et condition de radiation	69
2.3.3	Guide d'onde semi-infini	71
2.3.4	Guide d'onde fini avec condition de radiation laissant passer les modes propagatifs	77
2.4	Théorème général de convergence	79
2.5	Opérateurs de scattering et applications	82
2.5.1	Etude générale	82
2.5.2	Couronne circulaire	83
2.5.3	Guide d'onde	106
2.6	Construction d'un préconditionneur	116
2.6.1	Opérateur L	116
2.6.2	Algorithme de type Collino-Ghanemi-Joly	119
2.6.3	Algorithme amortissant les modes évanescents	121
2.7	Conclusion	124

3	Décomposition de domaine et équations intégrales	125
3.1	Le problème de transmission	127
3.2	Représentations intégrales des solutions de l'équation d'Helmholtz . .	128
3.2.1	Solution élémentaire	128
3.2.2	Résolution de l'équation d'Helmholtz dans \mathbb{R}^2	129
3.2.3	Représentation intégrale	130
3.2.4	Opérateurs intégraux sur le bord	132
3.2.5	Projecteurs de Calderón	133
3.3	Résolution directe	134
3.3.1	Réduction de la résolution	134
3.3.2	Principe des réactions de Rumsey	135
3.4	Résolution par décomposition de domaine et équations intégrales . . .	137
3.4.1	L'opérateur d'itération	138
3.4.2	Expression de l'opérateur d'itération par une résolution par équations intégrales	139
3.5	Formulation intégrale de l'algorithme	143
3.6	Méthode intégrale avec multiplicateur	148
3.6.1	Résolution des problèmes extérieur et intérieur	148
3.7	Résolution par la méthode d'éléments de frontière	156
3.7.1	Maillage de type éléments de frontière	157
3.7.2	Discrétisation des inconnues	158
3.7.3	Calcul des intégrales de base	159
3.7.4	Assemblage	160
3.7.5	Matrice de masse utilisée	160

3.7.6	Rappel du système global de l'algorithme de décomposition de domaine	161
3.8	Impédance scalaire	162
3.8.1	Calcul de l'opérateur de scattering	163
3.8.2	Validation	165
3.8.3	Conditionnement	166
3.8.4	Etude numérique du spectre	167
3.8.5	Tests de convergence	171
3.8.6	Géométrie carrée	176
3.9	Impédance avec opérateur de préconditionnement	177
3.9.1	Calcul de l'opérateur de scattering	177
3.9.2	Conditionnement	178
3.9.3	Etude numérique du spectre	179
3.9.4	Tests de convergence	181
3.9.5	Autres géométries	182
3.10	Résolution par GMRES	184
4	Décomposition de domaine, couplage BEM-FEM	189
4.1	Rappel du problème modèle	192
4.2	Réduction à une équation sur Σ	193
4.2.1	Opérateur de Steklov-Poincaré relatif au domaine Ω_0^∞	193
4.2.2	Opérateur de Steklov-Poincaré relatif au domaine Ω_1	194
4.2.3	Equation sur l'interface	194
4.3	Principe des méthodes de couplage	195

4.3.1	Représentation intégrale de la solution dans Ω_0^∞	196
4.3.2	Système équivalent sur l'interface Σ	196
4.3.3	Liens avec l'équation sur l'interface Σ	197
4.3.4	Construction d'une méthode de couplage	197
4.4	Méthode de Johnson-Nédélec	197
4.4.1	Construction à l'aide du cadre général	198
4.5	Méthode de Costabel	200
4.5.1	Dérivation de la méthode de Costabel à partir du cadre général	200
4.6	Méthode de de Labourdonnaye	201
4.6.1	Formulation symétrique de Costabel par le principe des réactions de Rumsey	202
4.7	Découplage MEI-MEF : Méthode de Décomposition de domaine . . .	204
4.7.1	Rappel de l'algorithme de décomposition de domaine	204
4.7.2	Expression de l'opérateur d'itération	205
4.7.3	Expression équivalente de la formulation symétrique de Costabel	207
4.8	Discrétisation et résultats numériques	209
4.8.1	Discrétisation	209
4.8.2	Structure des matrices engendrées par les méthodes directes de couplage	211
4.8.3	Couronne circulaire	211
4.8.4	Autre géométrie	219
5	Décomposition de domaine et méthodes d'éléments finis	223
5.1	Position du problème	226

5.2	Conditions de raccord et espaces fonctionnels	230
5.2.1	Ecriture dans l'espace $H_{00}^{1/2}(\Sigma_\ell)$	231
5.2.2	Approche de P.-L. Lions et B. Després	231
5.2.3	Algorithme de Ghanemi-Collino-Joly	232
5.2.4	Algorithmes de décomposition de domaine	234
5.2.5	Convergence de la méthode de décomposition de domaine . . .	234
5.3	Problème modèle et approximation par éléments finis nodaux	235
5.3.1	Problème modèle	236
5.3.2	Approximation par éléments finis nodaux	237
5.3.3	Cadre abstrait	238
5.4	Méthode de décomposition de domaine	240
5.4.1	Position du problème	241
5.4.2	Décomposition des fonctions	243
5.4.3	Conditions de raccord	244
5.4.4	Ecriture équivalente du système discret	245
5.4.5	Algorithme de décomposition de domaine	247
5.5	Solvabilité et stabilité avec raccord aux points de jonction	249
5.5.1	Problème limite continu	249
5.5.2	Solvabilité et stabilité du problème éléments finis avec cou- plage aux points de jonction	251
5.6	Convergence de l'algorithme de décomposition de domaine	253
5.6.1	Réduction de l'étude de la convergence	254
5.6.2	Etude de l'opérateur de scattering	255
5.6.3	Convergence de l'algorithme de décomposition de domaine . .	257

5.7 Méthode des éléments mixtes hybrides et schéma non conforme . . . 262

5.7.1 Lien de la méthode des éléments mixtes hybrides avec la méthode non conforme 264

5.8 Discrétisation et résultats numériques 268

5.8.1 Méthode non conforme 269

5.8.2 Méthode nodale 271

Conclusion et Perspectives 285